• $I(x_i) = -\log_r P(x_i)$ 转换：$\log_2 n$

$I(x_i y_j) = -\log_2 P(x_i y_j) = I(x_i) + I(y_j|x_i)$

$I(x_i|y_j) = -\log_2 P(x_i|y_j)$

$H(X) = E[I(x_i)] = -\sum p(x_i)\log p(x_i)$

$H_n(X) = \frac{H(X)}{\log_2 n}$

$H(XY) = H(X) + H(Y)$ (独立) $= \sum\sum p(x_i y_j)\log P(x_i y_j)$

$H(Y|X) = \sum p(x_i) H(Y|x_i)$ $\quad = H(X) + \sum_i p(x_i) H(Y|x_i)$

$H(XY) = H(X) + H(Y|X) \le H(X) + H(Y)$

$H(Y|X) = -\sum_i \sum_j p(x_i y_j)\log P(y_j|x_i)$

$f[E(x_i)] \ge E[f(x_i)]$ (上凸)

$D_{KL}(p\|q) = \sum p_i \log\frac{p_i}{q_i} = \sum p_i \log q - (-\sum p_i \log p_i)$

得 $\sum p_i \log p_i \le \sum p_i \log q_i$

$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$

$H(X^N) = NH(X)$

平均符号熵：$H_N(\vec{X}) = \frac{1}{N} H(X_1 \cdots X_N)$

极限熵：$H_\infty = \lim_{N\to\infty} H_N(\vec{X}) = \lim_{N\to\infty} H(X_N|X_1 \cdots X_{N-1})$

~~平稳~~ 记忆长：$m+1$, $H_\infty = H(X_{m+1}|X_1 X_2 \cdots X_m) = H_{m+1}$

时齐/齐次马尔可夫链：与时刻无关 —— k步转移：$P^{(2)} = P^2$

条件概率矩阵 $e\,\overset{x}{\square}$ 一步转移概率 $e\,\overset{e}{\square}$

m阶马尔可夫：

$H_\infty = H(X_{m+1}|X_1 \cdots X_m)$

$wP = w$ (稳定后), $\sum w = 1$

↓

状态极限概率

$p(x_k) = \sum_i w_i p(x_k|e_i)$

$= \pi P_{X|S}$

↓

符号极限概率

~~有/无记忆~~:

离散无记忆信道(DMC): $P(\vec{Y}|\vec{X})=\prod_{n}^{N}P(y_n|x_n)$

离散无记忆平稳(恒定)信道: $P(y_n=j|x_n=i)=P(y_m=j|x_m=i)$

信道矩阵: $P=X\backslash Y$

二元对称信道(BSC) $1-p$ $1-p$

二元删除信道(BEC) $1-p$ $1-p$ $P=\begin{bmatrix}1-p & p & 0\\ 0 & q & 1-q\end{bmatrix}$

信道疑义度: $H(X|Y)$

互信息: $I(x_i;y_j)=I(x_i)-I(x_i|y_j)=\log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}$

$=I(x_i)+I(y_j)-I(x_iy_j)$

条件互信息: ~~$I(x_i;y_j)$~~

$I(x_i;z_k|y_j)=I(x_i|y_j)-I(x_i|z_ky_j)=\log\frac{p(x_i|z_ky_j)}{p(x_i|y_j)}$

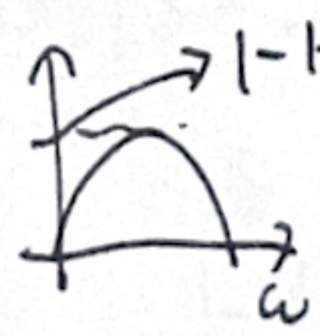
$I(x_i;z_ky_j)=I(x_i)-I(x_i|y_jz_k)=I(x_i;y_j)+I(x_i;z_k|y_j)$

平均互信息: $I(X;Y)=EI=\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}=\sum_j p(y_j)\sum_i p(x_i|y_j)\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}=\sum_j p(y_j)I(X;y_j)$

$=H(X)-H(X|Y)$ —疑义度

$=H(X)+H(Y)-H(XY)$

$=H(Y)-H(Y|X)$ —噪声



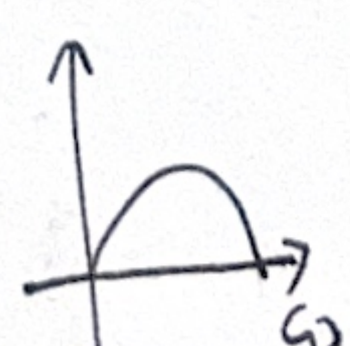
$I(X;Y)\le\min\{H(X),H(Y)\}$

$\boxed{信息传输率\ R=I(X;Y)}$ 信息传输速率 $R_t=\frac{1}{t}I(X;Y)$ bit/sym

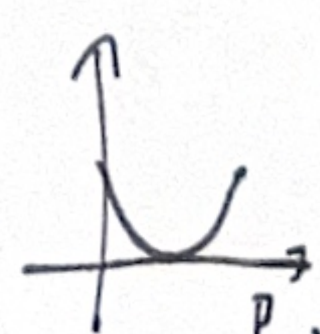
信道容量 $C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}$ bit/sym —最佳分布

$C_t=\frac{1}{t}\max\cdots$

~~C_{BSC}~~ $I=H(\omega\bar{p}+\bar{\omega}p)-H(p)$



输入变



输信道变

无噪无损：三 $H(Y|X)=H(X|Y)=0$

$P=[\diagdown]_r$ $C=\boxed{\log r=\log s\ (r=s)}$

有噪无损：$\leqslant$ $H(X|Y)=0$ $P=r[---]$

$\boxed{C=\log r}$

（取小的 log□）

无噪有损：$\geqslant$ $H(Y|X)=0$ $p=r\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$

$\boxed{C=\log S}$

输入对称 [□]（输入换后输出分布不变?）
（DIISC）

输出对称 [□□] ...
（DOSC）

对称 [□] $\boxed{\log S-H(p'\ldots)}$
（DSC）

强对称 $[\ldots]$ $\log r-\underbrace{H(p)}_{信位}-\underbrace{p\log(r-1)}_{纠错}$
（strong DSC）

~~弱对称~~
~~（weak DSC）[□□□]~~

弱对称 [□] 行排列 列和等
（weak DSC）

准对称 [□□□] $\boxed{C=\log r-\underbrace{H(p'\cdots)}_{H(Y|X)}-\sum_{k=1}^{n}\square\log[\,]}$ $H(Y)=\log r-\Sigma-|$

无记忆信道 N次 $I(\vec{X};\vec{Y})=\sum_{x,y,k}p(\alpha_k)p(\beta_h|\alpha_k)\log\frac{p(\beta_h|\alpha_k)}{p(\beta_h)}$

- 无记忆信源：$P(\alpha_k)=\prod P(\alpha_{ki})$
- 都无：$I(\vec{X};\vec{Y})=\sum_{k=1}^{N}I(X_k;Y_k)$

$I(XY;Z)=H(XY)-H(XY|Z)$
$\geq I(Y;Z)$
$\geq I(X;Z)$

并联：$C_k\leq\max I(X_k;Y_k)$，$C\leq\sum_{k=1}^{N}C_k$

	信源	信道	
记忆	✓	X	$I(\vec{X};\vec{Y})\leq\Sigma I(X_k;Y_k)$
	X	✓	$I(\vec{X};\vec{Y})\geq\Sigma I(X_k;Y_k)$
	X	X	$I(\vec{X};\vec{Y})=\Sigma I$

$I(X;Z)\leq\{I(Y;Z),I(X;Y)\}$

剩余度 $C-I(X;Y)$

相对剩余度 $1-\frac{I}{C}$

编码

$S=s_1\cdots s_q \to$ [enc] $\to C=W_1\cdots W_q$，$w_i=x_{i1},x_{i2}\cdots x_{il_i} \to$ 码字

信源符号集

$X=x_1\cdots x_r$ — r元码

码符号集

非奇异码：码字均各不同：$\boxed{r^l \ge q}$　N次扩展：$q^N \le r^l$，$\frac{\log q}{\log r} \le \frac{l}{N}$

唯一可译码：N次扩展非奇异码

等长非奇异一定是唯一可译码

即时码：不为其它前缀

无失真：$\frac{L}{N} \ge \frac{H(S)}{\log r}$ — S的平均信息；— r进制的信息 | 理论下界　$\boxed{L\log r > NH(S)}$

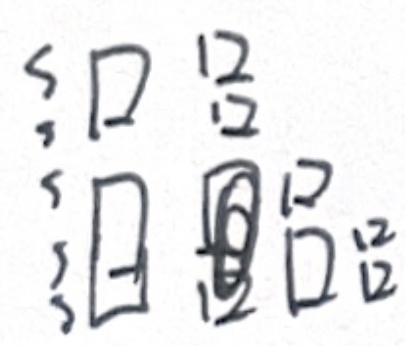
每个信源符号(N)需几个码符号(L)

编码信息率 $R = \frac{H(S)}{L/N}$ bit/rsym

效率 $\eta \le \frac{H(S)}{H(S)+\varepsilon} = \frac{R}{\log r}$

Kraft-McMillan：即时码/唯一可译码：$\boxed{\sum r^{-l_i} \le 1}$

Fano：



香农：0.1, 0.3, …, 0.99　0.57 — 三位 ⇒ $0.57\times 2^3 = 4.xx = 100$

Huffman：↑

游程编码　$2^n \to C$

$2^n \sim 2^{n+1}$ CA

$> 2^{n+1}$ CACA

$L_0 = \sum L(\omega)P[L(\omega)]$

LZ-77　[ ]　(back, length, output)

LZ-78　(index, output) → dict

LZW　(index) → W → dict

限失真

失真矩阵 $D = X \underset{}{\overset{Y}{\square}}$

汉明失真：$D=[\cdots]$，$L_1 L_2 \cdots$

平均失真：$\bar{D}=E[d]=\sum\sum p(x_i y_j)\, d(x_i, y_j)$

无记忆：$\bar{D}=\sum_{i=1}^{N}\bar{D}_i$ + 平稳 ~~[illegible]~~ $\bar{D}(N)=N\bar{D}$)

$\boxed{\text{率失真函数：} R(D)=\min\limits_{D\le D^*} I(X;Y)}$

信道容量：$C=\max I(X;Y)$ 信道固定，传输能力最大值

率失真函数：信源固定，满足 D^* 下信源可压缩的程度

$D\in[D_{min}, D_{max}]$　$R(D)\in[H(X), 0]$

$R(D_{max})=0$

$D_{min}=\sum_x p(x)\min_y d(x,y)$　$\begin{bmatrix} \min & & \\ & \min & \\ & & \min \end{bmatrix}$

$D_{max}=\min_y \sum_x p(x) d(x,y)$　$[\;\square\;]$

条件正确译码概率　$p[F(y_j)|y_j]=p(x_i|y_j)$

条件错误译码概率　$p(e|y_j)=1-p(x_i|y_j)=1-p[F(y_j)|y_j]=\sum_{k\ne i} p(x_k|y_j)$

平均 ——　$P_E=E[p(e|y_j)]=\sum_{j=1}^{s} p(y_j)p(e|y_j)$

$=\underbrace{1-\sum p(x_i y_j)}$

规则：

MAP：$P_X P_{Y|X}\to max$　~~$\sum$~~ $\sum p(x_i y_j)=\bar{P}_E$

ML：$P_{Y|X}\to max$　$\frac{1}{m}\sum p(x_i y_j)$（累加错认等概率）

Fano 不等式：$\boxed{H(X|Y)\le H(P_E)+P_E\log(k-1)}$ ✡

~~[illegible]~~

纠错编码

基本思路：加入冗余码元，用确定规则关联，
出错→关系破坏

反馈重传（~~AEQ~~ ARQ）

前向纠错（FEC）发有纠错能力

混合纠错（HEC）

检错、纠错、纠删

线性、非线性

系统码、非系统码

级联码

线性分组码：k个码元，长n码字，n-k个校验元：(n,k)分组码

$$\boxed{R=\frac{\log M}{n}=\frac{\log 2^k}{n}=\frac{k}{n}}$$

生成矩阵：$1\times k$，$k\times n$ → $1\times n$

$C=uG$，$G=[I\ P]$

系统码，前k为信息

校验矩阵 H → $GH^T=0$

⇒ $H=[-P^T\ I]$

冗余：~~空间、时间、空域、时域、视觉、统计~~

香农第一定理：无失真压缩下界是$H(X)$

第二定理：可靠传信上界是C

第三定理：有损在失真D的下界是$R(D)$